CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE

DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES 2 OPTIONS M et P Durée : 4 Heures

Nota : *Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm.*

Le problème se compose d'un préliminaire et de 4 parties. Les parties II, III, IV, sont indépendantes.

PRELIMINAIRE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient une droite (D), d'équation $mx + py + q = 0$, une courbe (C) d'équation $f(x,y) = 0$, et la courbe (C_k), d'équation $f(x,y) + k(mx + py + q)^2 = 0$, où k est un réel choisi non nul.

On suppose que f est continue, munie de dérivées partielles continues partout où elle est définie, et que (C) et (D) passent par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0).

On suppose enfin que les dérivées partielles de f en M_0 ne sont pas toutes les deux nulles.

Montrer que (C) et (C_k) ont la même tangente en M_0. On dira alors qu'elles sont tangentes en M_0.

Définitions et notations

Le plan, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est divisé en deux sous-ensembles disjoints U et V, dont la frontière commune est une courbe H incluse dans V. La courbe H admet une représentation paramétrique $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(t)$, où $\vec{F}$ est une application définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^1, dont la dérivée vérifie pour tout réel t, $\vec{F}'(t) \neq \vec{0}$. En outre, $\vec{F}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

soit : (1) $\vec{F}$ est périodique, admet une plus petite période T, et si $0 \leq t < t' < T$, alors $\vec{F}(t) \neq \vec{F}(t')$.

soit : (2) pour tout (t, t') tel que $t \neq t'$, $\vec{F}(t) \neq \vec{F}(t')$, et $\|\vec{F}(t)\|$ tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Enfin, à tout couple de points (A, B) situés dans U, distincts ou non, on associe la fonction g_{AB} définie sur $\mathbb{R}$ par, M(t) décrivant H :

$$g_{AB}(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\| + \|\overrightarrow{BM(t)}\| = \sqrt{\overrightarrow{AM(t)}^2} + \sqrt{\overrightarrow{BM(t)}^2}, \text{ où } \vec{U}^2$$

représente le carré scalaire usuel du vecteur $\vec{U}$.

PREMIERE PARTIE

I - 1 - montrer que g_{AB} admet une borne inférieure L_{AB}, qu'il existe au moins un point M_0 de H tel que $L_{AB} = \|\overrightarrow{AM_0}\| + \|\overrightarrow{BM_0}\|$, et que L_{AB} est strictement positif.

I - 2 - Montrer que g_{AB} est dérivable, et calculer sa dérivée à l'aide de la fonction $\vec{F}$.

I - 3 - En déduire que, si $g_{AB}(t_0) = L_{AB}$, ou bien les points A, B, $M(t_0)$ sont tels que :

$M(t_0) \in [A, B] - \{A, B\}$, ou bien la normale en $M(t_0)$ à H est aussi la bissectrice des deux demi-droites $(M(t_0), \overrightarrow{M(t_0)A})$ et $(M(t_0), \overrightarrow{M(t_0)B})$.

Préciser laquelle de ces deux conditions est réalisée lorsque U est convexe.

I - 4 - a) on suppose, dans cette question seulement, que A = B, et que g_{AB} est constante. Déterminer H et interpréter géométriquement le résultat de la question I - 3.

b) on suppose, dans cette question seulement, que $A \neq B$, et que g_{AB} est constante. Déterminer H et interpréter géométriquement le résultat de la question I - 3.

I - 5 - déduire des questions précédentes que si U est convexe,

a) de tout point de U, on peut mener au moins une normale à H

b) à tout couple de points distincts (A, B) de U on peut associer au moins une ellipse de foyers A et B tangente à H.

c) si $g_{AB}(t_0) = L_{AB}$, les trois points B, $M(t_0)$, et A' symétrique de A par rapport à la tangente en $M(t_0)$ à H, sont distincts et alignés.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie et la suivante, H est le cercle de centre O et de rayon 1. U est donc le disque ouvert de centre O et de rayon 1. On posera $\vec{F}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}$. L'étude proposée pourra être menée en utilisant les résultats du préliminaire et de la première partie même s'ils n'ont pas été établis.

ECOLES MILITAIRES:E.S.I.E.T.A.

On a : $\| \overrightarrow{OA} \| = \| \overrightarrow{OB} \| = a$; $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{i}) = w$, avec $0 < w < \frac{\pi}{2}$, et $0 < a < 1$.

On note : $S_1 = \{ t / g_{AB}(t) = L_{AB} \}$

$S_2 = \{ t /$ la droite $M(t) O$ est la bissectrice des demi-droites $(M(t), \overrightarrow{M(t)A})$ et $(M(t), \overrightarrow{M(t)B}) \}$

$S_3 = \{ t / O$ est équidistant des droites $(M(t)A)$ et $(M(t)B) \}$

II - 1 - montrer que : a) $S_1 \neq \emptyset$

b) $S_1 \subset S_2 \subset S_3$

c) $\{ 0, \pi, \text{Arccos}(a\cos w), -\text{Arc cos}(a\cos w) \} \subset S_3$

d) $\{ \pi, \text{Arc cos}(a\cos w), -\text{Arc cos}(a\cos w) \} \cap S_1 = \emptyset$

II - 2 - montrer que S_3 est l'ensemble des solutions de l'équation :

$[+2 a\cos^2 t - 2 (a^2 + 1) \cos w . \cos t + 2 a\cos^2 w] . \sin t = 0$

contrôler la compatibilité de ce résultat avec les conclusions de la question II 1 -

II - 3 - montrer que si $a \leq \cos w$, alors $L_{AB} = g_{AB}(0)$, puis, h étant une longueur donnée non nulle, construire l'ensemble éventuel des points A tels que $a \leq \cos w$ et $L_{AB} = h$

II - 4 - montrer enfin que si $a > \cos w$ et si $t_0 = \text{Arc cos}(\frac{\cos w}{a})$, alors

$L_{AB} = \inf (g_{AB}(t_0), g_{AB}(0))$.

II - 5 - il nous reste maintenant à comparer $g_{AB}(0)$ et $g_{AB}(t_0)$ dans le cas où $a > \cos w$.

Le calcul direct de $g_{AB}(t_0)$ étant relativement compliqué, nous allons chercher sa valeur par un autre procédé. Considérons la famille des courbes $(C\lambda)$ d'équations :

$x^2 + y^2 - 1 + \lambda (x - \frac{\cos w}{a})^2 = 0$, où λ est un réel non nul.

a) montrer qu'elles sont tangentes à H aux deux points $M(t_0)$ et $M(-t_0)$

b) trouver λ tel que $(C\lambda)$ est une conique centrée au milieu de [AB]

c) Montrer que cette conique est une ellipse de foyers A et B. En déduire $g_{AB}(t_0)$ puis L_{AB}. Sur la figure obtenue à la question II -3, et pour une même valeur de la constante h, construire maintenant l'ensemble des points A tels que $a > \cos w$ et $L_{AB} = h$.

TROISIEME PARTIE

$\overrightarrow{OA} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\vec{i}$, a et b étant deux réels non nuls. Tels que $-1 < a < b < 1$

III - 1 - on suppose ici que O est le milieu de [AB]. Déterminer l'ensemble des points M de H tels que la droite MO est bissectrice de l'angle des demi-droites $(M, \overrightarrow{MA})$ et $(M, \overrightarrow{MB})$ (attention, il y a quatre points). En déduire L_{AB}

III - 2 - même question si on suppose A situé entre O et B

III - 3 - on suppose maintenant que O est situé entre A et B, et plus près de A que de B.

a) à quelle condition sur (a, b) existe-t-il un point M au moins tel que le triangle AMB est non aplati et admet (MO) comme bissectrice intérieure.

b) cette condition n'étant pas satisfaite, déterminer L_{AB}.

c) cette condition étant satisfaite, déterminer L_{AB}. Il pourra être commode, en cours de calcul, de poser $a + b = s$, $ab = p$.

NB : On rappelle que dans un triangle PQR non aplati, si la bissectrice intérieure de l'angle P coupe la droite QR en S, alors :

$$\frac{\| \overrightarrow{PQ} \|}{\| \overrightarrow{PR} \|} = -\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}}$$

QUATRIEME PARTIE

Dans cette partie, H est une droite, donc U est un demi-plan ouvert.

IV - 1 - A et B étant fixés, distincts ou non, montrer qu'il existe un point M_0, et un seul, de la droite H indépendant du choix de $\vec{F}$, tel que

$L_{AB} = \| \overrightarrow{AM_0} \| + \| \overrightarrow{BM_0} \|$

donner une construction de M_0.

IV - 2 - A étant fixé, déterminer et éventuellement construire, l'ensemble des points C tels que $L_{AC} = h$, où h est une longueur constante donnée.

IV - 3 - A et B étant fixés, distincts ou non, déterminer et éventuellement construire l'ensemble des points E tels que :

$L_{AE} = L_{BE}$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail